460. 線形微分方程式ノ特異点, I

福原満洲雄(北大)

$$\frac{dy_j}{dx}=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\,y_k \qquad (j=1,2,\text{------},n)$$

ナル微分方程式系ヲ行列ヲ使ッテ

$$(1)\qquad \frac{dY}{dx}=A(x)Y$$

ト書ク、$A(x)$ ハ $x\to\infty$ ノ時漸近的ニ

$$(2)\qquad A(x)\sim\sum_{r=m}^{\infty}A^{(r)}x^{-\frac{r}{\rho}} \qquad (A^{(-m)}\neq 0)$$

ナル形ニ展開サレルモノトスル、ρ ハ正ノ整数デアル。$m>-\rho$ ノ場合ニハ (1) ノ形式的解ヲ漸近展開トスル解ノ存在ヲ証明スルノニ直接 (1) ニ存在定理ヲ應用シテモ巧ク行カナイカラ, 豫メ適當ナ置換ヲ行ッテ (1) ヲ都合ノヨイ形ニ変形シテ置ク必要ガアル、ソノタメ

$$(3)\qquad P(x)\sim\sum_{r=-m'}^{\infty}P^{(r)}x^{-\frac{r}{\rho'}}$$

$$(4)\qquad Y=P(x)Z$$

ト置キ Z ノ方程式ヲ

$$(5)\qquad \frac{dZ}{dx}=B(x)Z$$

ト書ケバ

$$(6)\qquad B(x)=P^{-1}(x)A(x)P(x)-P^{-1}(x)P'(x)$$

トナル、$B(x)$ ハ形式的ニ

$$(7)\quad B(x) \sim \sum_{r=-m''}^{\infty} B^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}} \qquad (B^{(-m'')} \neq 0)$$

ナル形ニ展開サレル、p', p'' ハ整数デアル。先ヅ形式的ノ計算デ $B(x)$ ノ展開式ヲ成ルベク簡単ニシテ見ル、$m'' \leqq -p$ ナラバ $x=\infty$ ハ確定特異点トナルカラ，$P(x)$ ヲドウ取ッテモ $m'' > -p$ デアル場合ヲ考ヘル。

特有方程式

$$(8)\quad |A^{(-m)} - \lambda E| = 0$$

ノ根ヲ $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ トスル．$\lambda_j \neq \lambda_k$ ナラバ特ニ

$$p' = p, \quad m' = 0, \quad |P^{(0)}| \neq 0$$

デアルヤウナ $P(x)$ デ $b_{jk}(x) = 0$ 即チ $b_{jk}(x)$ ノ展開式ノ係数ガ皆 0 トナルヤウニ出来ル、但シ

$$B(x) = (b_{jk}(x))$$

従ッテ (5) ハ

$$\frac{dz_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(x) z_k \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

デアル、故ニ (8) ガ異ナル根ヲ持テバ (5) ハ二ッ又ハソレ以上ノ微分方程式系ニ分レルカラ，未知函数ノ数ガ n ヨリ少イ場合ニ問題ガ帰着サレル、若シ (8) ノ n 個ノ根ガ皆等シイナラバ

$$\bar{A}(x) = A(x) - \lambda_1 x^{\frac{m}{p}} E \sim \sum_{r=-m}^{\infty} \bar{A}^{(r)} x^{-\frac{r}{p}}$$

ト置キ

$$(9) \quad \frac{dY}{dx} = \bar{A}(x)Y$$

ヲ考ヘル、特有方程式

$$(10) \quad \left|\bar{A}^{(-m)} - \lambda E\right| = 0$$

ノn個ノ根ハ皆0デアル、(6)ノ代リニ

$$(11) \quad \bar{B}(x) = P^{-1}(x)\bar{A}(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x)$$

ヲ考ヘル。$B(x)$ト$\bar{B}(x)$ノ間ノ関係ハ

$$(12) \quad B(x) = \bar{B}(x) + \lambda_1 x^{\frac{m}{p}} E$$

デ$P(x)$ニ無関係デアル。$\bar{B}(x)$ノ展開式ヲ

$$(13) \quad \bar{B}(x) \sim \sum_{r=-\bar{m}}^{\infty} \bar{B}^{(r)} x^{-\frac{r}{p''}} \qquad \left(\bar{B}^{(-\bar{m})} \fallingdotseq 0\right)$$

トスル、ソノトキ特有方程式

$$(14) \quad \left|\bar{B}^{(-\bar{m})} - \lambda E\right| = 0$$

ガ0デナイ根ヲ持ツヤウニ$P(x)$ヲ取ルコトガ出來ル、コレガ異ナル根ヲ持テバ未知函數ノ數ガnヨリ少ナイ場合ニ問題ガ帰着サレル、(14)ノn個ノ根ガ皆等シイナラバ

$$p' = p \qquad \text{従ッテ} \quad p'' = p$$

トスルコトガ出來ル、ソノトキ$\bar{m} < m$デナケレバナラナイコトガ証明サレル，故ニ今度ハnハ変ラナイガmハ少サクナル．コノ考ヘヲモット嚴密ニシテ帰納法ヲ使ヘバ次ノ結果ヲ得ル。

「$P(x)$ヲ適當ニ選ブコトニヨリ

$$B(x) = \Lambda(x) + x^{-1}\bar{B}(x)$$

$$\Lambda(x)=\begin{pmatrix}\lambda_1(x) & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & \lambda_2(x) & \cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & & \lambda_n(x)\end{pmatrix}$$

$$\lambda_j(x)=\sum_{r=-n''}^{p''-1}\lambda_j^{(r)}x^{-\frac{r}{p''}}\qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$\overline{B}(x)\sim\sum_{r=p''}^{\infty}\overline{B}^{(r)}x^{-\frac{r}{p''}}$$

トスルコトガ出來ル」

而モ $\lambda_j(x)\neq\lambda_k(x)$ ナラバ $b_{jk}(x)=0$ トスルコトモ出來ル、故ニ例ヘバ

$$\lambda_1(x)=\cdots\cdots=\lambda_m(x)\neq\lambda_{m+1}(x),\cdots\cdots,\neq\lambda_n(x)$$

トスレバ $z_1,\cdots\cdots,z_m$ ダケガ一組ノ微分方程式ヲ滿足シ

$$z_1=e^{\lambda_1(x)}u_1,\cdots\cdots,z_m=e^{\lambda_m(x)}u_m$$

ト置ケバ $u_1,\cdots\cdots,u_m$ ニ關スル方程式ハ $x=\infty$ ヲ確定特異点トシテ持ツコトニナル、故ニ $\overline{B}(x)$ ヲ出來ルダケ簡單ニスルニハ確定特異点ノ場合ノ結果ヲ使ヘバヨイ（行列変換トソノ應用参照）。

從ッテ $\overline{B}(x)$ ノ展開式ハ有限個ノ項シカ含マナイヤウニ出來ルカラ

$$\overline{B}(x)=\sum_{r=p''}^{\infty}\overline{B}^{(r)}x^{-\frac{r}{p''}}$$

ト書イテモ差支ヘナイ。$u_1,\cdots\cdots,u_m$ ニ關スル方程式ハ

$x=\infty$ ヲ確定特異点トシテ持ツカラソノ形式的解ガ分ル、ソレカラモトノ変数 $y_1, \cdots\cdots, y_n$ ニ戻ルコトニヨリ (1) ノ形式的解ガ求マル、コノヤウニシテ Fabry ノ定理ニ達スル。

ソコデ

$$P_N(x)=\sum_{r=-m'}^{N} P^{(r)} x^{-\frac{r}{\rho'}}$$

$$Y=P_N(x)Z$$

ト置キ Z ノ方程式ヲ

$$\frac{dZ}{dx}=B_N(x)Z$$

$B_N(x)$ ノ展開式ヲ

$$B_N(x)\sim\sum_{r=-m''}^{\infty} B_N^{(r)} x^{-\frac{r}{\rho''}}$$

ト書ク、R ニ對シテ N ヲ十分ニ大キク取リサヘスレバ

$$B^{(r)}=B_N^{(r)} \qquad (r=-m'', \cdots\cdots, R)$$

トナル、故ニ上ニ述ベタ定理ニ於テ $P(x)$ ノ展開式ハ有限個ノ項カラ成ルモノトスルコトガ出來ルカラ $P(x)$ ノ展開式ハ形式的ノモノデナク

$$P(x)=\sum_{r} P^{(r)} x^{-\frac{r}{\rho'}}$$

ト置イテ差支ヘナイコトニナル、コノヤウニ $B(x)$ ノ形ヲ簡單ニシテカラ (5) ニ解ノ存在定理ヲ應用スルト都合ガヨイ。

尚 $x^{\frac{1}{\rho''}}$ ヲ x デ置換ヘルコトニヨリ $\rho''=1$ トスルコトガ出

求ルコトヲ注意スル、次回ニ於テ存在定理ノ應用ノ仕方ニツイテ述ベヨウ。